ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕМОРЕОЛОГИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

А.А. Иванов, Н.И. Инсарова, В.Г. Лещенко, В.А. Мансуров, М.А. Шеламова.

Белорусский государственный медицинский университет, пр. Дзержинского 83,БГМУ, 220116, Минск, Беларусь, E-mail: mansurov@tut.by

Abstract The technique of the shear rate calculation for the tube viscometric quasi-stationary flow of the structural non-Newtonian fluid was developed. A pattern of a real-time algorithm that is obtained the flow curve and the haemorheological indexes from the viscometer's data was constructed.

Знание гемореологических параметров позволяет проследить реологические нарушения в патогенезе различных заболеваний и состояний и исследовать влияние реологических нарушений на протекание патологического процесса и клиническую картину, а значит, позволяет определить выбор методов терапии для коррекции гемореологических нарушений. Посредством измерений можно получить гемореологические показатели: 1) индекс ригидности эритроцитов $T_k = H_{ct}\left(\eta_{01}^{0,4} - 1\right)/\eta_{01}^{0,4}$, где $\eta_{01} = \eta_0/\eta_p$; 2) индекс агрегации (относительное количество агрегированных эритроцитов) $I_a = \left(\eta_0 - \eta_i\right)/\eta_i$ и 3) показатель эффективности доставки кислорода $T_{O_2} = H_{ct}/\eta_i$. Здесь: η_0 - вязкость крови при бесконечно малой скорости сдвига (структурная вязкость); η_i - вязкость при бесконечно большой скорости сдвига (гидродинамическая вязкость); η_p - вязкость плазмы крови.

В данной работе для определения перечисленных показателей предлагается использовать оригинальный нестационарный капиллярный вискозиметр. Для обеспечения работы данного устройства предлагается алгоритм вычисления гемореологических показателей.

Схематичный внешний вид нестационарного вискозиметра и схема, объясняющая его принцип действия, показаны на ниже следующих рисунках.

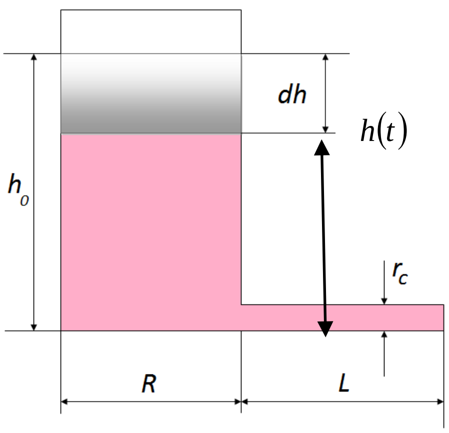

Рисунок 1 - Схематический радиальный разрез

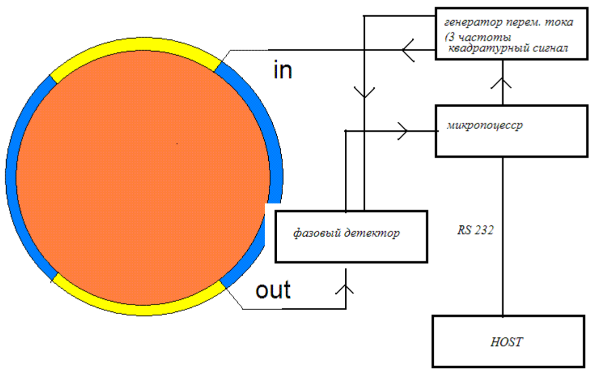

Рисунок 2 – Рабочая ячейка и микропроцессорная система

Неньютоновская жидкость под действием гидростатического давления Δp, определяемого высотой столба h_0 ($\Delta p = \rho g h_0$, ρ - плотность жидкости, g - ускорение свободного падения), свободно вытекает из вертикального напорного цилиндра радиуса R через горизонтальный капилляр радиуса r_c и длиной L. Верхняя поверхность жидкости свободна, на остальных границах предполагается отсутствие скольжения.

Перемещение свободной поверхности dh за время dt определяет уменьшение объема жидкости в напорном цилиндре $dV = \pi \cdot R^2 dh$. В этом случае изменение расхода во времени:

$$Q(t) = \frac{dV}{dt} = \pi \cdot R^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\pi \cdot r_c^3}{(\rho g h(t) \cdot r_c / 2L)^3} \int_0^{\rho g h(t) \cdot r_c / 2L} \tau^2 f(\tau) d\tau \qquad (1)$$

здесь $\tau_w = \Delta p \cdot r_c / 2L$ напряжение сдвига на стенке капилляра, $\partial u / \partial r = \dot{\gamma} = f(\tau)$ - реологическая функция, определяемая свойствами неньютоновской жидкости. Предполагается, что длина капилляра значительно больше его диаметра, поэтому влиянием входного и выходного участков можно пренебречь.

Данное соотношение является интегральным уравнением Фредгольма первого рода относительно неизвестной конститутивной функции $\dot{\gamma} = f(\tau)$, которая является конечной целью вискозиметрических измерений. Из измерений можно с известной степенью точности определить левую часть данного уравнения.

Задача определения $\dot{\gamma} = f(\tau)$ таким образом не является корректной (плохо поставленная задача). Извест ны несколько методов приближенного решения таких задач: метод подбора, имеющий широкое практическое применение, метод квазирешения, а также метод замены исходного уравнения близким к нему, метод квазиобращения и метод регуляризации [1].

Алгоритм работы программно-аппаратного комплекса, состоящего из микропроцессора и мощного компьютера, состоит из двух частей. Часть первая - аппаратная: измерение импеданса производится в двух целях – получение исходных данных для определения показателя гематокрита и определение уровня жидкости в напорной трубке. Полученные результаты в реальном масштабе времени сообщаются главному вычислительному устройству, проходит заключительная обработка данных (вторая часть).

Процедура вычислений основывается на методе регуляризации решения уравнения (1) по Тихонову, используя полученные экспериментальные данные [2,3]. В этой процедуре интервал, между измеренными минимальным и максимальным напряжением сдвига на стенке, равномерно делится на N_j частей. Подобным образом на N_k частей делится неизвестная скорость сдвига $\dot{\gamma}$.

Точность приближенного решения может быть выражена в виде суммы квадратов отклонений этого решения от экспериментальных данных s_1. Гладкость приближенного решения обеспечивается посредством минимальности суммы квадратов отклонений второй производной во внутренних точках дискретизации s_2. Процедура регуляризации заключается в нахождении минимума линейной комбинации этих компонентов $s_1 + \lambda \cdot s_2$, где λ - произвольно выбираемый параметр регуляризации.

Результаты экспериментов задаются в виде: $\langle 0; \tau_w; \Gamma \rangle_i$, $\Gamma = Q / \pi \cdot r_c^3$ - псевдоскорость сдвига и приводятся в безразмерный вид:

$$X = \frac{\tau_w - \tau_{\min}}{\tau_{\max} - \tau_{\min}}; \qquad \Omega = \frac{\Gamma}{\Gamma_{\max}}; \qquad f = \frac{\dot{\gamma}}{\Gamma_{\max}} \qquad (2)$$

при этом $0 \le X \le 1$, $0 < \Omega \le 1$. Для дискретизации задачи отрезок [0; 1] разбивается на N_{ap} частей с шагом ΔX. Регуляризованое решение (1) в векторной форме имеет вид:

$$\vec{f}(X) = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}^T \mathbf{B}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \vec{\mathbf{1}} \qquad (3)$$

где $\vec{1}$ – единичный вектор размерности N_{exp}; **A** – матрица размерности $N_{exp} \times N_{ap}$, выражает отклонение численного решения от точного, представленного экспериментальными данными; **B** – матрица размерности $(N_{ap} - 2) \times N_{ap}$, выражает условие регуляризации (минимизация суммы квадратов вторых производных функции $\vec{f}(X)$).

Компоненты матриц **A** и **B** определяются из соотношений (2) и (3):

$$A_{ij} = \frac{a_{ij}\Delta X}{2(X_j + X_L)} \cdot \frac{1}{\Omega_i}, \qquad i = \overline{1, N_{\exp}}; \quad j = \overline{1, N_{ap}}; \tag{4}$$

$$B_{ij} = \begin{cases} 1/(\Delta X)^2, & \text{если} \quad j = i; \\ -2/(\Delta X)^2, & \text{если} \quad j = i+1; \\ 1/(\Delta X)^2, & \text{если} \quad j = i+2; \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases} \qquad i = \overline{1, N_{ap} - 2}; \quad j = \overline{1, N_{ap}};$$

Вычисление τ_0 производится в итерационном процессе. Начальное приближение находится из условия:

$$0 < X_0 < \min(X_{in}) \tag{5}$$

Далее по формуле (2) вычисляется $\vec{f}(X)$. Критерий остановки итераций: $f(X_0) = 0$ Если $f(X_0) > 0$, то текущее значение X_0 больше действительного, если $f(X_0) < 0$, то – меньше. Новое значение X_0 вычисляется с учетом (5). Для куэттовской вискозиметрии возможна ситуация, когда $0 \le X_0 \le \min(X)$, т.е. $f(0) > 0$.

Таким образом, из результатов нестационарных измерений вычисляется кривая течения крови $\dot{\gamma} = f(\tau)$. Посредством экстраполяции кривой течения при $\dot{\gamma} \to 0$ и $\dot{\gamma} \to \infty$ вычисляются константы кривой течения крови: η_0 - вязкость крови при бесконечно малой скорости сдвига (структурная вязкость); η_i - вязкость при бесконечно большой скорости сдвига (гидродинамическая вязкость); η_p - вязкость плазмы крови. На основе этих констант получаются гемореологические индексы: 1) индекс ригидности эритроцитов $T_k = H_{ct}\left(\eta_{01}^{0,4} - 1\right)/\eta_{01}^{0,4}$, где $\eta_{01} = \eta_0/\eta_p$; 2) индекс агрегации (относительное количество агрегированных эритроцитов) $I_a = (\eta_0 - \eta_i)/\eta_i$ и 3) показатель эффективности доставки кислорода $T_{O_2} = H_{ct}/\eta_i$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФФИ РБ, проект № Б10-072.

Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я Методы решения некорректных задач. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. Изд. 2-е. 284 с.
2. Yeow, Y.L., Nguyen, Y.T., Vu, T.D., Wong, H.K., 2000. Processing the capillary viscometry data of fluids with yield stresses. Rheologica Acta 39, 392–398.
3. Yeow, Y.L., Lee, H.L., Melvani, A.R., Mifsud, G.C., 2003. A new method of processing capillary viscometry data in the presence of wall slip. Journal of Rheology 47 (2), 337–348.