В. А. МАНСУРОВ[1], Ю. В. СЫТЫЙ[2]

БИОФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГЕМОДИНАМИКИ В АРТЕРИАЛЬНЫХ АНЕВРИЗМАХ ГОЛОВНОГО МОЗГА

[1]Белорусский государственный медицинский университет
[2]5-я городская клиническая больница, Минск, Беларусь

В последние годы интерес к исследованиям в области математического моделирования гемодинамики постоянно растет, вероятно, это можно связать с постоянным ростом сердечно-сосудистых заболеваний [1]. Современная ультразвуковая диагностика артериального русла позволяет получать сведения о средней скорости кровотока внутренних сонных артерий.

Для изучения гемодинамики в артериях с наличием аневризм нами была разработана математическая модель движения крови. При этом мы рассматривали давление, обусловленное коэффициентом местного гидравлического сопротивления аневризмы при искривлении артерии для ньютоновской и неньютоновской жидкостей.

Течение жидкости по артериальной сосудистой системе требует затрат энергии, которая расходуется на преодоление сил вязкого трения. Чтобы компенсировать эти затраты на течение необходимо иметь постоянный источник энергии – перепад давления (напора) ΔP . Энергетические затраты можно характеризовать коэффициентом гидравлического трения ς (коэффициент гидравлических потерь, или коэффициент Дарси). Согласно формуле Вейсбаха, определяющей потери давления на гидравлических сопротивлениях, ς имеет вид: $\Delta p = \varsigma\rho\overline{u}^2/2$, где ρ – плотность жидкости; $\overline{u}$ – средняя скорость течения. Другими словами ς есть отношение ΔP к динамическому давлению потока жидкости $\rho\overline{u}^2/2$. Общие потери давления ΔP можно представить в виде суммы двух потерь: ΔP_L – линейных, связанных с длиной и диаметром артерии, и ΔP_r – местных, связанных с изменением направления или деформации потока (сужения, расширения, разветвления и т. д., то есть места, где поток претерпевает деформацию).

$$\Delta P = \Delta P_L + \Delta P_r = \sum \frac{2L}{D}\lambda\overline{u}^2 + \sum \frac{\varsigma\overline{u}^2}{2}.$$

Отсюда вводятся два коэффициента гидравлического сопротивления: линейный λ и местный ς. Если потери давления сосредоточены на очень коротких участках, длиной которых можно пренебречь, то такие потери называются местными гидравлическими сопротивлениями. Потери напора в местных гидравлических сопротивлениях существенным образом зависят от так называемого режима движения жидкости. Если известны линейные потери, то можно вычислить местные:

$$\Delta P_r = \Delta P - \Delta P_L . \tag{1}$$

Уравнение движения для неньютоновской и ньютоновской жидкости и начальные условия

Ламинарное движение в цилиндрической трубе конечной длины может реально осуществляться при выполнении следующих условий: 1) число Рейнольдса (Re) не должно превышать своего критического значения; 2) длина трубы, отсчитываемая от входного ее сечения, должна превышать длину так называемого начального участка, на протяжении которого всякого рода возмущения, неизбежно возникающие при входе в трубу, будут постепенно уменьшаться.

Рассмотрим двумерное установившееся течение несжимаемой неньютоновской жидкости, текущей из среды неограниченного объема в капилляр длиной l и радиуса r_c при скачке давления P. В начальный момент времени жидкость покоилась. На стенках капилляра и полости предполагается условие прилипания. Уравнение движения записывается как:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho(u\nabla)u=\nabla[-pI+\eta(\nabla u+(\nabla u)^T)]+\nabla P.$$

При выполнении условий неразрывности $\nabla u=0$.

Для ньютоновской жидкости «входовая длина», т. е. длина, на которой полностью устанавливается простое сдвиговое течение, зависит от числа Рейнольдса Re, что выражается формулой $L_e/D=0{,}035\bar{u}D\rho/\eta=0{,}035\,\mathrm{Re}$, где D – диаметр трубки, ρ – плотность жидкости. Одним из методов сведения к минимуму влияния входных эффектов при математическом моделировании является использование капилляра такой длины, при которой можно пренебречь перепадом давления во входной области по сравнению с общим перепадом по всей длине трубки. Обычно это означает, что величина L_e/L, где L – полная длина трубки, должна быть малой, порядка 0,01.

В качестве начальных условий было принято, что средняя скорость течения на входе в данный сосудистый сегмент есть постоянная величина, равная 0,3 м/сек. На выходе искривленного под углом α сосуда давление полагалась равным 0. Изменение геометрических параметров будет отражаться в виде изменения локальной скорости течения, а следовательно, локального Re и перепада давления. В математическом моделирования использовалась модель (2) с параметрами: $\eta 0$ = 29 мПа·с, $\eta\infty$ = 4,3 мПа·с, λ = 1,3 с, n = 0,16, что соответствует нормальным показателям крови здорового человека, модель ньютоновской жидкости η = 4,3 мПа·с. Плотность жидкости полагалась равной 1050 кг/м^3.

Численные расчеты проводились пакетом COMSOL 4.0. Этот пакет численного моделирования решает системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных элементов в двух измерениях. Результатом вычислений явилось поле скоростей течения и распределение давления.

Геометрия модели

Геометрия изучаемой модели представлена на рис. 1. Искривленный под углом α сосуд с постоянным диаметром и жесткими стенками имеет аневризму, описываемую эллипсом с полуосями a и b. На входном участке задавалась средняя скорость потока $\bar{u}$ с учетом L_e. Сначала вычислялся перепад давления ΔP_L на прямой артерии, угол наклона аневризмы – 0 (нет местных гидравлических сопротивлений). Затем изменялись угол поворота потока от 0° до 50°, полуоси эллипсоида аневризмы и вычислялся полный перепад давления ΔP. Следующий этап вычисления ΔP_r согласно формуле (1).

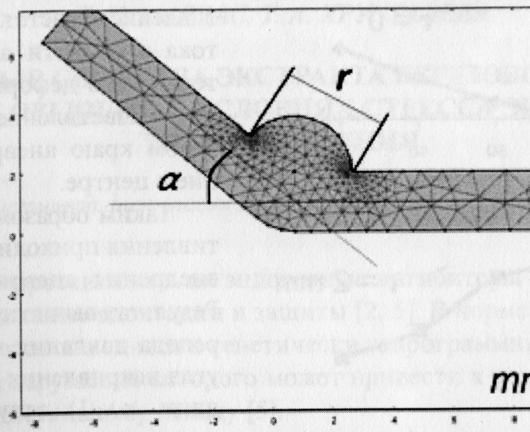

Рис. 1. Геометрия модели: α – угол между приносящим и уносящим отрезками артерии, r – диаметр аневризмы

Варьируемые параметры:

d	2	[mm]	диаметр артерии
l	5·d		половина длины артерии
alpha	40	[deg]	
a_h	1.9	[mm]	
b_v	1.9	[mm]	
rho	1050	[kg/m^3]	плотность жидкости
eth_inf	0.0045	[Pa·s]	infinite viscosity
eth_zer	0.029	[Pa·s]	zero viscosity
lam	1.3	[s], n	0.16

Результаты

Общий перепад давления при заданной средней скорости потока $\bar{u}$ колебался в пределах от 86 до 93 Па, местные перепады давления составили от –12 до + 4 Па, максимальный относительный вклад местного перепада составляет около 12 % для неньютоновской жидкости и менее 5 % для ньтоновской жидкости.

Известно, что местное гидравлическое сопротивление при изменении направления течения определяется по формуле Вейсбаха ($\alpha \le 70°$)

$$\varsigma = A(0{,}95\sin^2(\alpha/2)+2{,}05\sin^4(\alpha/2)),$$

где A – поправочный коэффициент. Отсюда следует, что для рассматриваемых в данной работе углов давление, обусловленное местным гидравлическим сопро-

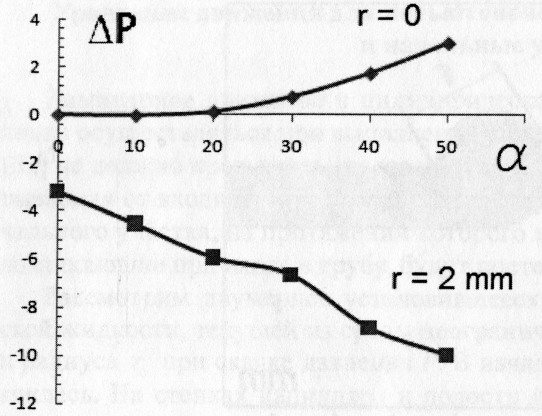

Рис. 2. Зависимость местного перепада давления от длины участка внедрения аневризмы в артерию и угла искривления

тивлением, растет. Направление потока в области аневризмы значительно его деформирует: происходит разветвление и сужение на левом краю аневризмы, расширение в центре.

Таким образом, местные сопротивления приходится на участок r внедрения аневризмы в артерию. Результат вычислений местного перепада давления в зависимости от угла искривления артерия для двух длин r: 1) отсутствие аневризмы, только искривление и 2) наличие аневризмы. Расширение потока в области аневризмы уменьшает местное гидравлическое сопротивление в этой области. Действие угла искривления работает в противоположном направлении (рис. 2).

Значение перепада давления, обусловленного коэффициентом местного гидравлического сопротивления, представляется в виде изолиний (линий одинакового значения параметра). Изолинии перепада давления ньютоновской жидкости и неньютоновской жидкости ведут себя похожим образом. Отрицательная величина перепада давления обусловлена значительным уширением потока в области аневризмы. Наличие двух областей, вероятно, связано с вертикальной осью аневризмы. При небольшой высоте происходит только уширение потока, дальнейшее увеличение высоты вызывает появление вихревого течения внутри аневризмы.

Выводы.

1. Анализ результатов математического моделирования гемодинамики в артериальных аневризмах указывает на выраженное снижение скорости потока и наличие вихревого движения крови в полости аневризмы.

2. Результаты математического моделирования могут быть экстраполированы на клиническую оценку риска развития острых нарушений мозгового кровообращения у пациентов с артериальными аневризмами головного мозга.

Литература

1. *Манак Н. А. и др.* Руководство по кардиологии / под ред. Н. А. Манака. Минск: Беларусь, 2003. 624 с.