

ISSN 0134-9635

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный  
научно-технический журнал

Основан в 1975 году

Выпуск 24

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ПОВОРОТОВ КОРНЯ ЗУБА, ВОЗНИКАЮЩИХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

Ивашенко С.В., Юркевич К.С., Босяков С.М.

Белорусский государственный медицинский университет, Минск  
Белорусский государственный университет, Минск

*In the present paper visualization of displacements and turns of a fang under action of the concentra loading is carried out. The geometrical form of a fang is described by two various elliptic hyperboloids. As example modeling displacements and turns of a fang under action of the loadings directed along an axis of plicate and an axis of ordinates is executed.*

В практике ортопедической стоматологии достаточно часто возникает необходимость перемещений и поворотов зубов, связанная с устранением у пациента аномалии дефектов челюстно-лицевой области. Результаты расчета напряженно-деформированного состояния, возникающего под действием различным образом ориентированных сосредоточенных нагрузок, в системе «зуб - периодонт» представлены монографии [1]. Настоящая работа продолжает это актуальное направление и посвящена моделированию перемещений корня зуба в костной ткани без учета влияния периодонта.

Следуя [1], будем считать корень зуба абсолютно твердым телом, которое имеет форму эллиптического двуполостного гиперboloида. В этом случае уравнение поверхности корня можно представить в виде:

$$F(x, y, z) = \frac{z}{H} - \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + p^2},$$

где  $x, y, z$  - пространственные координаты,  $H$  - параметр, описывающий вышину корня зуба,  $p$  - параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба,  $a_k$  - при  $x \geq 0$  и  $a_k = a_2$  при  $x < 0$ ,  $a_1, a_2, b$  - полуоси эллипса в сечении корня зуба.

Если на зуб действует произвольным образом ориентированная сосредоточенная нагрузка, корень зуба получает три поступательных перемещения вдоль осей координат и три поворота вокруг осей координат. Перемещения точек костной ткани, контактирующих с поверхностью корня зуба, в направлении координатных осей, представим в следующем виде:

$$u = \frac{u_0 + (z - z_a)\varphi_y - y\varphi_z}{1 + \frac{z}{H} \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + p^2}}, \quad v = \frac{v_0 + (x - x_b)\varphi_z - (z - z_b)\varphi_x}{1 + \frac{z}{H} \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + p^2}},$$

$\varphi_z$  - углы поворота зуба вокруг осей координат. С учетом толщины  $h$  кости, прилегающей к корню зуба, для поступательных перемещений будем иметь:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2P_x h}{\pi G(a_1 + a_2)b \left( \left( \frac{\gamma H^2}{2a_1 a_2} + \frac{H^2}{2b^2} + 1 \right) (1 - d^2) + H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\gamma}{a_1 a_2} \right) d^2 \ln(d) \right)}, \\
 & = \frac{2P_y h}{\pi G(a_1 + a_2)b \left( \left( \frac{H^2}{2a_1 a_2} + \frac{\gamma H^2}{2b^2} + 1 \right) (1 - d^2) + H^2 \left( \frac{\gamma}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) d^2 \ln(d) \right)}, \quad (2) \\
 & = \frac{2P_z h}{\pi G(a_1 + a_2)b \left( H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left( \frac{1 - d^2}{2} + d^2 \ln(d) \right) + \gamma (1 - d^2) \right)},
 \end{aligned}$$

$P_y$  и  $P_z$  - проекции сосредоточенной нагрузки на оси координат,  $G$  - модуль упругости. Выражения для координат центров сопротивления можно найти в монографии

по определению углов поворота корня зуба относительно координатных осей определяемых следующими уравнениями [1]:

$$\begin{aligned}
 \frac{(z_f - z_b)P_y}{a_1 + a_2} h &= \frac{\pi G b H^2 \varphi_x}{8} \left( (1 - d^2)^2 \left( \frac{3b^2}{4a_1 a_2} + \frac{\gamma b^2}{H^2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} + 2\gamma - \frac{7}{4} \right) + \right. \\
 & \left. \left( 5 - \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) - d^4 \left( 3 + \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) \ln(d) - \frac{4z_b}{3H} \left( 2(1 - d^3) + \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} + \gamma - 1 \right) \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times (1 - 3d^2 + 2d^3) \right) \right) + \frac{2GHb\varphi_z}{3} \left( (a_1 - a_2) \left( \sqrt{(1 - d^2)^3} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\gamma H^2}{b^2} \left( \frac{1}{4} \sqrt{(1 - d^2)^3} - \frac{3d^2 \sqrt{1 - d^2}}{8} + \frac{3}{8} d^4 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - d^2}}{d} \right) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\pi x_b}{4} \left( 2(1 - d^3) + \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} + \gamma - 1 \right) (1 - 3d^2 + 2d^3) \right) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2}{b^2} + 3 \right) d^4 \ln(d) - \frac{8(1-d^3)z_a}{3H} - \\
& - \frac{4z_a}{3H} \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} + \gamma - 1 \right) (1 - 3d^2 + 2d^3) - \frac{16(a_1 - a_2)x_c}{3\pi b^2} \times \\
& \times \left( \frac{1}{3} \sqrt{(1-d^2)^3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} + \frac{\gamma b^2}{H^2} \sqrt{(1-d^2)^3} \right), \\
\frac{((x_f - x_b)P_y - y_f P_x)h}{a_1 + a_2} = & \frac{2GH(a_1 - a_2)\varphi_x}{3} \left( (1-\gamma) \left( \frac{1}{4} \sqrt{(1-d^2)^3} - \frac{3d^2}{8} \sqrt{(1-d^2)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{8} d^4 \ln \left( \frac{1}{d} (1 + \sqrt{1-d^2}) \right) \right) + \frac{\gamma H z_b}{b^2} \times \right. \\
& \left. \left( \frac{1}{3} \sqrt{(1-d^2)^3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)}}{d} \right) \right) \right) + \frac{\pi G b H^2 \varphi_x}{8} \times \\
& \times \left( \left( \frac{\gamma(a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2)}{b^2} + \frac{\gamma b^2}{a_1 a_2} - 2\gamma + 8 \right) \left( \frac{1}{4} (1-d^2)^2 - d^2 \left( \frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln(d) \right) \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{H^2} (1-d^2)^2 (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2 + b^2) - \frac{16\gamma x_b}{3\pi b^2} (a_1 - a_2) \sqrt{(1-d^2)^3} \right).
\end{aligned}$$

Здесь  $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$ ,  $\nu$  - коэффициент Пуассона.  $x_f, y_f, z_f$  - координаты т приложения силы к корню зуба.

Из последней системы линейных уравнений найдем углы поворота корня зуб учетом выражений для поступательных перемещений (2) выполним построение к зуба после его перемещения под действием сосредоточенной нагрузки. Для визуации корня зуба используем обобщенную цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$

$$[1]: \quad x = a_k r \cos(\theta), \quad y = b r \sin(\theta), \quad z = H \sqrt{r^2 + d^2}.$$

Здесь  $r$  - безразмерный радиус,  $a_k = a_1$  при  $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$  и  $a_k = a_2$

, что рассматриваемые величины  $H$  и  $p$  соответствуют высоте корня зуба 15 мм. Упругие свойства костной ткани описываются модулем упругости МПа,  $\nu = 0.25$ , что соответствует кортикальной костной ткани [2].

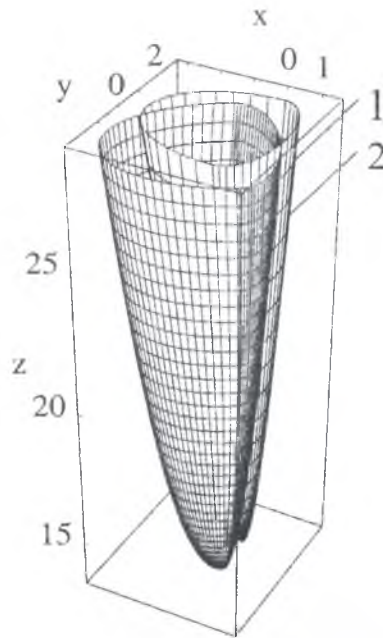
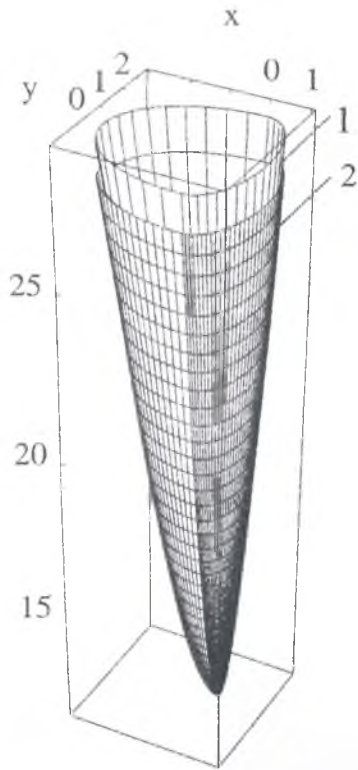


Рис. 1. Перемещение и поворот зуба под действием силы, направленной вдоль оси абсцисс: 1 – исходное положение зуба; 2 – конечное положение зуба

Рис. 2. Перемещение и поворот зуба под действием силы, направленной вдоль оси ординат: 1 – исходное положение зуба; 2 – конечное положение зуба

видно, что под действием направленной вертикально вниз нагрузки корень мещаясь, практически не поворачивается. Полное перемещение зуба состав- м, углы поворота корня зуба относительно осей абсцисс и ординат равны ну- товорота относительно оси аппликата составляет 4.65 мкрад. Рисунок 2 пока- о под действием сосредоточенной нагрузки, направленной вдоль оси аппли- ь зуба перемещается по направлению действия силы, одновременно поворачи- относительно двух координатных осей. При этом максимальное перемещение г 1.8 мм, угол поворота относительно оси ординат равен нулю, угол поворота ьно оси абсцисс равен 4,3 мрад, относительно оси аппликата – 1.255 рад. В ие отметим, что более полный количественный анализ перемещений и пово- чей зубов позволяют выполнить кривые, представляющие собой сечения кор- аходящегося в исходном и конечном положении, плоскостями, проходящими улярно оси аппликата.

### Литература

Наумович, С.А. Биомеханика системы зуб – периодонт / С.А. Наумович, евский. – Минск: Экономические технологии. – 132 с.  
 Пашмурина, В.Р. Математическое моделирование в планировании ортопеди- чения пациентов с полным отсутствием зубов на нижней челюсти / уриша, Е.Н. Чумаченко // Современная стоматология, 2006. – № 1.